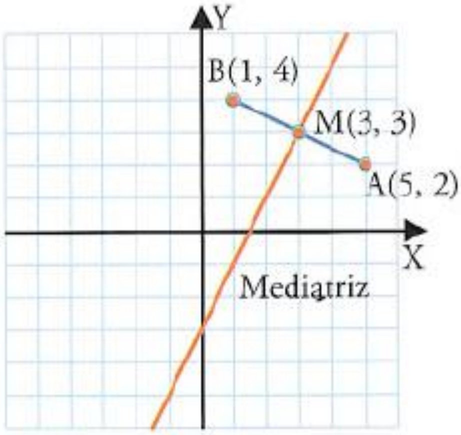
LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO (1º BACH.)

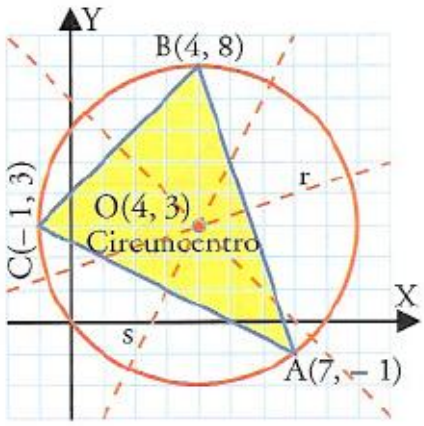
Definición: Un **lugar geométrico del plano** es un conjunto de puntos del plano que verifican una propiedad (que normalmente se puede expresar mediante una ecuación).

MEDIATRIZ:

Mediatriz de un segmento: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento, es decir, es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.

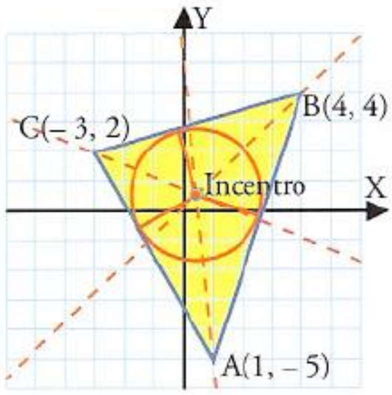


Mediatrices de un triángulo: son las mediatrices de sus lados. Se cortan en un punto llamado **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Para hallar las coordenadas del circuncentro, se hallan las ecuaciones de dos mediatrices y se calcula su punto de corte.



BISECTRIZ:

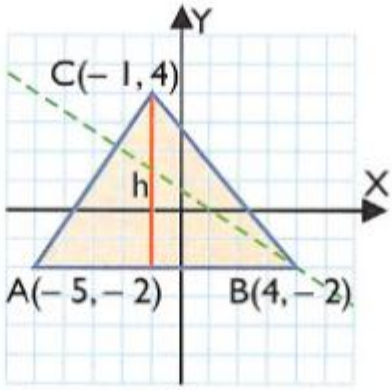
Bisectriz de un ángulo: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las semirrectas que forman un ángulo, es decir, la recta que corta al ángulo en dos partes iguales.

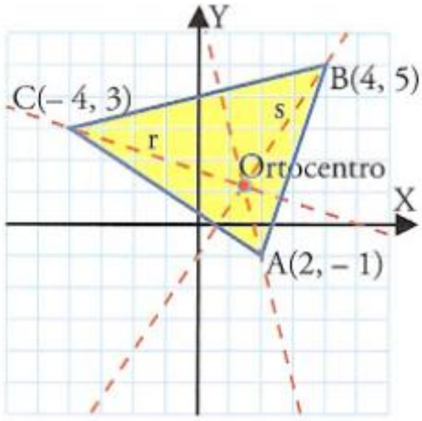


Bisectrices de un triángulo: son las bisectrices de sus tres ángulos. El punto en el que se cortan se llama **incentro**, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. Para calcular la coordenadas de este punto, se hallan las ecuaciones de dos bisectrices y se resuelve el sistema formado por ellas.

ALTURAS Y MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO:

Alturas de un triángulo: Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación. Donde se cortan las tres alturas del triángulo se llama **ortocentro**. Para hallar el ortocentro se hallan las ecuaciones de las rectas de dos alturas y se calcula el punto de corte.





Medianas de un triángulo: Una mediana de un triángulo es el segmento que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto. El punto de corte de las medianas se llama **baricentro**, se representa por la letra G por que es el centro de gravedad del triángulo. Para claclular su coordenadas se utiliza la siguiente fórmula:

$$G = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

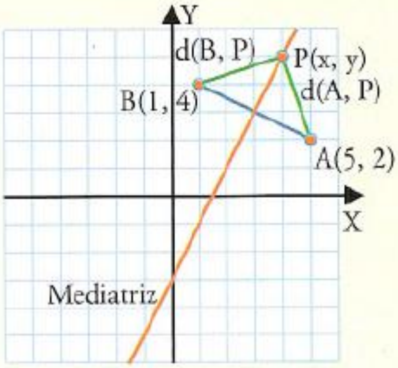
$$donde\ A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)\ \ y\ C = (c_1, c_2)\ son\ los\ vértices\ del\ triángulo$$

LUGARES GEOMÉTRICOS - EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo

Halla la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los puntos A(5, 2) y B(1, 4)

P(x, y)



d(A, P) = d(B, P)

$$d(A, P) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2$$

$$\cancel{x^2} - 10x + 25 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 8y + 16$$

$$-8x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow -2x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = 2x - 3$$

Se obtiene la ecuación de una recta.

Ejemplo

Calcula el circuncentro del triángulo cuyos vértices son los puntos:

A(7, –1), B(4, 8) y C(–1, 3)

a) Se calcula la mediatriz **r** del lado AB:

El punto medio del lado AB es M(11/2, 7/2)

La pendiente del lado AB es $m_{AB} = \frac{8+1}{4-7} = \frac{9}{-3} = -3$

La pendiente de la mediatriz es la opuesta de la inversa de m_{AB}: $m_r = 1/3$

Aplicamos la ecuación punto-pendiente: punto M(11/2, 7/2), $m_r = 1/3$

$$y - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{11}{2}\right) \Rightarrow x - 3y + 5 = 0$$

b) Se calcula la mediatriz **s** del lado AC:

El punto medio del lado AC es N(3, 1)

La pendiente del lado AC es $m_{AC} = \dfrac{3+1}{-1-7} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$

La pendiente de la mediatriz es la opuesta de la inversa de m_{AC}: $m_s = 2$

Aplicamos la ecuación punto-pendiente: punto N(3, 1), $m_s = 2$

$$y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow 2x - y - 5 = 0$$

c) Se resuelve el sistema formado por las dos mediatrices:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 5 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Circuncentro } \mathbf{O(4, 3)}$$

Ejemplo

Calcula el ortocentro del triángulo cuyos vértices son los puntos:

A(2, – 1), B(4, 5) y C(– 4, 3)

a) Se calcula la recta **r** que contiene a la altura relativa al lado AB:

Pasa por el vértice C(– 4, 3)

La pendiente del lado AB es $m_{AB} = \dfrac{5+1}{4-2} = \dfrac{6}{2} = 3$

La pendiente de la recta perpendicular es la opuesta de la inversa, $m_r = -1/3$

Se aplica la ecuación punto-pendiente: punto C(–4, 3), m = – 1/3

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 4) \Rightarrow 3y - 9 = -x - 4 \Rightarrow x + 3y - 5 = 0$$

b) Se calcula la recta **s** que contiene a la altura relativa al lado AC:

Pasa por el vértice B(4, 5)

La pendiente del lado AC es $m_{AC} = \dfrac{3+1}{-4-2} = \dfrac{4}{-6} = -\dfrac{2}{3}$

La pendiente de la recta perpendicular es la opuesta de la inversa, $m_s = 3/2$

Se aplica la ecuación punto-pendiente: punto B(4, 5), m = 3/2

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y - 10 = 3x - 12 \Rightarrow 3x - 2y - 2 = 0$$

c) Se resuelve el sistema formado por las dos rectas que contienen a las alturas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - 5 = 0 \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ortocentro } \mathbf{O\left(\frac{16}{11}, \frac{13}{11}\right)}$$

Ejemplo

Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos:

A(5, 2), B(0, 5) y C(–2, – 1)

$$G\left(\frac{5+0-2}{3}, \frac{2+5-1}{3}\right) = \mathbf{G(1, 2)}$$